AULA 3

Equações de primeira ordem: Equações separáveis e Equações exatas

META:

Descrever dois métodos de resolução de E.D.O.'s de primeira ordem: o método das variáveis separáveis e o método para equações exatas.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Identificar equações separáveis e equações exatas.

Resolver E.D.O.'s de primeira ordem que sejam equações separáveis e equações exatas.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos de integrais de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}$, diferenciais e diferenciação de funções de valores reais com domínio em $\mathbb{R}^2$. Além dos conheimentos das aulas 1 e 2.

3.1 Introdução

Caros alunos agora sim estamos prontos para aprendermos alguns métodos de resolução de E.D.O.'s. Nessa terceira aula vamos conhecer dois métodos de resolução de E.D.O.'s. Começaremos com E.D.O.'s de primeira ordem, onde gastaremos mais duas aulas para expormos todo o conteúdo planejado e em seguida partiremos para E.D.O.'s lineares de ordem superior.

3.2 Equações separáveis

Definição 3.1. Uma equação diferenciável de 1^a ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

é dita separável ou de variáveis separáveis.

Exemplo 3.1. 1) $\frac{dy}{dx} = y^2 x\, e^{3x+4y}$; (separável). Observe que podemos separar as variáveis x e y.

2) $x^2 dy + (y-1)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(y-1)}{x^2}$; (separável)

3)$\frac{dy}{dx} = y + \sin x$ (não separável). Observe que não podemos separar as variáveis x e y.

Considere uma E.D.O. de primeira ordem separável

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{3.5}$$

onde h e g são funções contínuas.

Observe que a E.D.O. (3.5) pode ser escrita na forma

$$p(y)\frac{dy}{dx} = g(x),$$

onde $p(y) = \frac{1}{h(y)}$ ou ainda melhor na forma

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = g(x), \tag{3.6}$$

onde $y = y(x)$ é solução da E.D.O. (3.5) e $F(y) = \int p(y)dy$. De fato, note que

$$\frac{d}{dx}F(y(x)) = g(x) \Leftrightarrow F'(y)\frac{dy}{dx} = g(x),$$

assim $F'(y) = p(y) \Rightarrow F(y) = \int p(y)dy$.
Dessa maneira integrando (3.6) com respeito a x, obtemos

$$F(y(x)) = G(x) + c, \tag{3.7}$$

onde $G(x) = \int g(x)dx$ e c é uma constante de integração. Resolvendo esta equação para $y = y(x)$ acharemos

$$y(x) = F^{-1}(G(x) + c),$$

a qual é a solução procurada.

Observação 3.1. A função inversa de F sempre existirá nesse caso. De fato, uma vez que $F' = p$ e $p \neq 0$ segue que F é monótoma e, assim F possui função inversa.

Observação 3.2. Considere o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),\ y(x_0) = y_0.$$

Sabemos da discussão acima que $F(y(x)) = G(x)+c$ é uma família de soluções para a E.D.O. dada. Observe que no caso do P.V.I. dado, a constante de integração c é exatamente igual a $F(y(x_0)) - G(x_0)$. Assim, a expressão (3.7) pode ser escrita na forma

$$F(y(x)) - F(y(x_0)) = G(x) - G(x_0)$$

ou equivalentemente

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}dy = \int_{x_0}^{x} g(x)dx. \tag{3.8}$$

Portanto, dado o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y),\ y(x_0) = y_0$$

a solução é obtida quando separamos as variáveis e calculamos as integrais definidas

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(y)}dy = \int_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Exemplo 3.2. Encontre a solução geral da equação

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t^2}{y^2}.$$

Esta equação pode ser escrita na forma $y^2\frac{dy}{dt} = t^2 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{y^3}{3}\right) = t^2$, onde $y = y(t)$ (y é vista como função de t uma vez que é supostamente solução da E.D.O. dada). Assim, integrando com respeito à t, obtemos

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{y^3}{3}\right) dt = \int t^2 dt \Leftrightarrow y(t) = (t^3 + c)^{1/3}.$$

Exemplo 3.3. No Exemplo 2.1, afirmamos que a família de soluções da E.D.O. $dy/dx = -y/x$, ou melhor, $xdy + ydx = 0$ é $y(x) = c/x$. Agora vamos resolvê-la e comprovar tal afirmação?
Resolva a E.D.O. de primeira ordem $xdy + ydx = 0$. Observe que

$$xdy + ydx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx.$$

Assim integrando ambos os lados da equação acima, obtemos

$$ln|y| = -ln|x| + c_1 = ln|x|^{-1} + c_1.$$

Aplicando em ambos os lados da equação a função inversa do logaritmo neperiano (a função exponencial), obtemos $|y| = e^{ln|x|^{-1}+c_1} = e^{ln|x|^{-1}} \cdot e^{c_1} = c_2\,|x|^{-1}$, onde $c_2 = e^{c_1}$. De onde concluímos que $y(x) = \pm c_2 x^{-1}$, ou

$$y(x) = c\,x^{-1}.$$

Exercício Resolvido 3.1. Encontre a solução do P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},\ y(\sqrt{20}) = 4.$$

A E.D.O. dada pode ser escrita na forma

$$y\frac{dy}{dx} = -x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right) = -x.$$

Integrando com respeito à x, obtemos $x^2 + y^2 = c^2$.

Note que a família de soluções da E.D.O. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ é dada implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = c^2$, ou seja, a equação $G(x, y, c) = 0$, onde $G(x, y, c) = x^2 + y^2 - c^2$.

Bom, voltemos ao P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},\ y(\sqrt{20}) = 4.$$

Já sabemos a expressão ímplicita da família de soluções da E.D.O., agora só precisamos achar uma solução dessa família que satisfaça a condição inicial dada. Desde que a solução da E.D.O. tenha que satisfazer $y(\sqrt{20}) = 4$, segue $(\sqrt{20})^2 + (4)^2 = c^2$ e, daí $c = \pm 6$. Portanto, a solução do P.V.I.é dada implicitamente por $x^2 + y^2 = 36$, ou explicitamente, por $y(x) = \sqrt{36 - x^2}$.

Observe que se a condição inicial do P.V.I. fosse $y(\sqrt{20}) = -4$, a solução explícita seria $y(x) = -\sqrt{36 - x^2}$.

Observação 3.3. Você já deve ter notado que quando separamos as variáveis para resolvermos a E.D.O., nos deparamos com a situação $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$. Suponha que $y = y_0$ seja um zero da

função $h(y)$, ou seja $h(y_0) = 0$. Observe que nesse caso a função $y(x) = y_0$ é solução da E.D.O. separável $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ (solução de equilíbrio), contudo ela pode não aparecer na família de soluções obtida pelo método, uma vez que a função $\frac{1}{h(y)}$ não está definida em $y = y_0$. É o que acontece no exercício seguinte.

Exercício Resolvido 3.2. Resolva o P.V.I.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 1, \; y(0) = 0.$$

Da expressão (3.8) o P.V.I.dado é equivalente a

$$\int_0^y \frac{dy}{y^2 - 1} = \int_0^x dx,$$

onde estamos considerando $y \neq \pm 1$.

Para resolvermos a integral da esquerda recorreremos a técnica das frações parciais (para mais esclarecimentos sobre essa técnica veja Stewart (2006a)). Queremos que $\frac{1}{y^2-1} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y+1}$. Dessa maneira, obtemos

$$\frac{1}{y^2 - 1} = \frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2-1} dy &= \int [\frac{1}{2(y-1)} - \frac{1}{2(y+1)}] dy = \frac{1}{2} ln|y-1| - \frac{1}{2} ln|y+1| + c_1 \\ &= \frac{1}{2} ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| + c_1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^y \frac{1}{y^2 - 1} = \int_0^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| - \frac{1}{2} ln 1 = x - 0.$$

Então, a solução procurada é dada implicitamente pela equação $ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = 2x$.

Para acharmos a família de soluções da E.D.O. $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1$ é só resolvermos a integral indefinida $\int \frac{dy}{y^2-1} = \int dx$. Assim, a família de soluções é dada, implicitamente, por $\frac{y-1}{y+1} = ce^{2x}$ que se reduz a (para obter essa expressão final basta somar e subtrair 1 no numerador)

$$y(x) = \frac{1 + c\,e^{2x}}{1 - c\,e^{2x}}.$$

Se ao invés da condição $y(0) = 0$ do P.V.I.dado, quiséssemos resolver esta mesma E.D.O. sujeita à condição inicial y(0)=- 1, seria possível achar a solução dentre as soluções da família encontrada? A resposta é não, observe que não existe valor para a constante c nesse caso. Observe que a única solução que satisfaz esse P.V.I.é a solução de equilíbrio $y = -1$, a qual foi "perdida"pelo método.

Para finalizarmos essa seção, deixamos como exercício para vocês aplicar esse método de resolução para resolver a E.D.O.

$$4y' - x^3 = 0$$

do exemplo 1.3 da aula 1.

3.3 Equações exatas

Antes de falarmos de equações exatas é necessário que gastemos um tempo relembrando de alguns pontos do conteúdo da disciplina de Cálculo II.

Em Cálculo II, foi visto que se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas contínuas em uma região R do plano xy, então sua diferencial total é dada por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \quad (3.9)$$

Em particular, se $f(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$, segue de (3.9) que

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{3.10}$$

Em outras palavras, dada uma família de curvas $f(x,y) = c$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem calculando o diferencial total dessa família. Para mais informações sobre esse assunto veja Stewart (2006b).

Exemplo 3.4. Seja $f(x,y) = c$, onde $f(x,y) = 4x + x^3y^2$, então de (3.10) segue que

$$(4 + 3x^2y^2)dx + (2x^3y)dy = 0$$

que é equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4 + 3x^2y^2}{2x^3y}.$$

Para o que vamos expor adiante é mais importante inverter o problema, ou seja, dado

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4 + 3x^2y^2}{2x^3y},$$

temos equivalentemente que

$$(4 + 3x^2y^2)dx + (2x^3y)dy = 0,$$

onde, por (3.10), pode ser vista reescrita como

$$d(4x + x^3y^2) = 0.$$

Assim, integrando essa última equação obtemos uma família de soluções para a E.D.O. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4+3x^2y^2}{2x^3y}$.

Definição 3.2. (**Diferencial Exata**)- Uma expressão diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

é uma diferencial exata em uma região R do plano xy se ela corresponde a diferencial total de alguma função $f(x, y)$, ou seja, se $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dz$, onde $z = f(x, y)$.

Definição 3.3. (**Equação exata**)- Uma equação

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é dita exata se a expressão do lado esquerdo for uma diferencial exata.

Exemplo 3.5. A equação $(1 + \cos(t + x))dt + \cos(t + x)dx = 0$ é exata, pois $(1 + \cos(t + x))dt + \cos(t + x)dx = d(t + \sin(t + x))$.

Observação 3.4. Sabendo que uma determinada equação $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é equação exata, segue pela definição que existe uma função $z = f(x, y)$ tal que $M(x, y)dx + N(x, y)dy = dz$. Portanto,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow dz = 0.$$

Logo, para acharmos a solução geral da equação exata dada basta-nos resolver a equação $dz = 0$, cuja solução $f(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$ obtemos integrando ambos os lados da igualdade $dz = 0$ com respeito a z, não esquecendo que $z = f(x, y)$.

Até agora vimos equações que são fáceis para deduzirmos sua diferencial, mas se nos defrontarmos com equações mais complicadas pode ficar difícil decidir se a equação é exata ou não e obter sua diferencial, caso seja exata. Dessa maneira, gastaremos um tempo expondo um teste para identificar se a equação é exata ou não e uma vez exata como obter sua diferencial.

Teste para identificar uma equação exata

Teorema 3.1. *Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $\alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Então, $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma diferencial exata se, e somente se,*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

A demonstração desse teorema é muito útil no sentido que nos ensinará como calcular a diferencial, caso a equação seja exata. Dessa maneira, vamos a demonstração!!

Demonstração: Provemos primeiro que se $M(x, y)dx+N(x, y)dy$ é uma diferencial exata então vale a igualdade $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.
Como $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é uma diferencial exata, temos pela definição, que existe uma função $z = f(x, y)$ tal que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Assim, $M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y}(M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(N(x, y)),$$

pois as derivadas parciais de M e N são funções contínuas. Portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A recíproca é o que nos será muito útil nos cálculos mais adiante. Agora queremos mostrar que se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, então existe uma função $z = f(x, y)$ tal que $M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. A demostração será obter essa função f desde que a igualdade $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ é válida.

Observe que $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, para alguma função $f(x,y)$ se, e somente se,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + h(y), \qquad (3.11)$$

onde $h(y)$ é uma função qualquer de y. Derivando parcialmente com respeito à y ambos os lados da equação (3.11) obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + h'(y).$$

Portanto, $\partial f/\partial y$ será igual a $N(x,y)$ se, e somente se,

$$N(x,y) = \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx + h'(y)$$

ou equivalentemente,

$$h'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx. \qquad (3.12)$$

Observe que $h'(y)$ é uma função apenas de y, enquanto o lado direito da equação (3.12) é uma função das variáveis x e y. Portanto a igualdade (3.12) só faz sentido se o lado direito for uma função apenas de y, e este é o caso se, e somente se,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Portanto, se $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ não existe função $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Por outro lado, se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ então nós podemos obter

$$h(y) = \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx\right] dy$$

. Consequentemente, $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ onde

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dx\right] dy. \qquad (3.13)$$

∎

Exemplo 3.6. Encontre a solução geral da E.D.O.

$$3t^2y^2\frac{dy}{dt} + 2ty^3 = 0.$$

Observe que a E.D.O. acima pode ser escrita na forma

$$2ty^3\,dt + 3t^2y^2\,dy = 0.$$

Note que, pelo Teorema 3.1, essa equação é uma equação exata pois

$$\frac{\partial}{\partial y}(2ty^3) = \frac{\partial}{\partial x}(3t^2y^2).$$

Logo, temos que existe uma função $f(t,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial t} = 2ty^3$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 3t^2y^2$. Pela demonstração desse teorema sabemos que essa função é dada pela equação em (3.13). Dessa maneira, obtemos

$$f(t,y) = \int 2ty^3 dt + \int \left[3t^2y^2 - \int 6ty^2 dt\right] dy = t^2y^3 + 0.$$

Portanto,

$$2ty^3\,dt + 3t^2y^2\,dy = d(t^2y^3).$$

Consequentemente, a E.D.O.

$$2ty^3\,dt + 3t^2y^2\,dy = 0$$

é equivalente a

$$d(t^2y^3) = 0$$

cuja solução é $t^2y^3 = c, c \in \mathbb{R}$.

Obtemos a expressão da função $f(t,y)$ pela equação (3.13), no entanto aconselhamos que para resolver as equações exatas vocês apliquem o procedimento para se chegar até esta equação, feito na demonstração do teorema, a fim de evitarmos a memorização de fórmulas. Ou seja, dado a E.D.O. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, comece fazendo $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ e siga o procedimento da demonstração.

3.4 Obtendo solução de uma equação de primeira ordem não exata

Suponha agora que uma determinada equação diferencial ordinária

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.14}$$

não seja exata. Será que existe uma maneira de torná-la exata? Ou melhor, nós podemos encontrar uma função $\mu(x,y)$ tal que a equação diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{3.15}$$

seja equivalente a anterior e seja uma equação exata? (Duas equações diferenciais são equivalentes quando soluções de uma são soluções da outra e vice-versa). A resposta é sim. Vamos ver como podemos fazer isso?

Sabemos da discussão anterior que a condição para que (3.15) seja exata é

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x,y)M(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x,y)N(x,y))$$

ou equivalentemente

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3.16}$$

(Por simplicidade omitimos a dependência das funções com respeito à x, y). Portanto a equação (3.15) é exata se, e somente se, $\mu(x,y)$ satisfaz a equação (3.16). Dessa maneira para acharmos a função $\mu(x,y)$ procurada, temos que resolver a E.D.P. (3.16). Como não sabemos resolver E.D.P. ainda, trabalharemos com algumas hipóteses sobre a função μ a fim de simplificarmos a condição (3.16).

1) Considere μ uma função apenas de x. Nesse caso (3.16) se reduz a

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\mu. \tag{3.17}$$

Mas, como o lado direito da expressão (3.17) depende das variáveis x e y e o lado esquerdo é função apenas da variável x, esta expressão só terá sentido se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = G(x).$$

Neste caso, teremos

$$\mu(x) = e^{\int G(x)\,dx}. \tag{3.18}$$

Para achar a expressão de μ dada acima, basta separar as variáveis em (3.17) e integrar.

2) Considere μ uma função apenas da variável y. Neste caso´o raciocínio é o mesmo que no caso anterior e dessa maneira obtemos

$$\mu(y) = e^{\int H(y)dy},$$

onde $H(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$.

Observação 3.5. 1) O fator $\mu(x, y)$ encontrado nos casos 1) e 2) acima é chamado **fator integrante** para a equação (3.14). A razão para essa nomenclatura deve-se ao fato que uma vez achado a função μ que torna (3.14) exata, podemos facilmente integrar a equação e resolver a E.D.O..

2)Nem sempre as equações (3.14) e (3.15) serão equivalentes. Para que isso ocorra é necessário que $\mu(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) no domínio da função.

3) A expressão

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

é quase sempre uma função que depende de x e y. Apenas para pouquíssimas funções $M(x, y)$ e $N(x, y)$ a expressão acima dependerá apenas da variável x. Uma situação semelhante ocorre quando μ depende apenas da variável y. É por essa razão que muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas.

Exemplo 3.7. Encontre a solução geral da E.D.O.

$$(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Essa equação não é exata pois $\frac{\partial M}{\partial y} = y + 2e^x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = e^x$. No entanto,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{y + e^x}{y + e^x} = 1.$$

Portanto, esta equação tem $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$ como fator de integração. Isto significa que a equação

$$(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + (y + e^x)dy = 0$$

é equivalente a

$$e^x(\frac{y^2}{2} + 2ye^x)dx + e^x(y + e^x)dy = 0 \tag{3.19}$$

e esta última é uma equação exata. Logo, existe uma função $z = f(x, y)$ tal que (3.19) se reduz a

$$dz = 0$$

e assim a solução de (3.19) é $f(x, y) = c, c \in \mathbb{R}$. Calculando a função $z = f(x, y)$ obtemos $f(x, y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x}$. E resolvendo a expressão $f(x, y) = c$ para y obtemos as soluções explícitas

$$y(x) = -e^x \pm [e^{2x} + 2ce^{-x}]^{1/2}.$$

Novamente gostaríamos de enfatizar que nessa questão usamos a fórmula dada em (3.18) para obtermos o fator integrante $\mu(x)$, no entanto vocês não precisam decorar fórmulas e nem queremos incentivar tal ato. Para não decorar fórmulas basta que:

1) Dada a E.D.O. (3.14) verifique se a mesma é exata. Caso não seja multiplique-a por $\mu(x, y)$.

2)Resolva a equação (3.16) fazendo as hipóteses que μ depende apenas de x (caso 1 apresentado acima) ou que μ depende apenas de y (caso 2 apresentado acima).

3.5 Conclusão

Da aula de hoje concluímos que é possível com um pouco de paciência e cuidado resolvermos algumas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, a saber, aquelas chamadas por equações separáveis e equações exatas.

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos a identificar algumas equações diferencias de primeira ordem, a saber, equações separáveis e equações exatas. Vimos vários exemplos de equações separáveis e alguns cuidados que devemos ter na hora de resolvermos tais equações, pois, em alguns casos, o método aprendido não nos dá todas as equações da E.D.O. em questão. Vimos que algumas soluções são "perdidas"pelo método.

Vimos também como testar se uma dada equação é exata e uma vez exata como obter a expressão da diferencial. Algumas equações que não são exatas podem ser "tornadas"exatas (na verdade podem ser equivalentes a equações exatas) pela multiplicação de um fator de integração $\mu(x, y)$ e, dessa maneira, conseguimos facilmente resolvê-las.

PRÓXIMA AULA

..

Em nossa próxima aula continuaremos com outros métodos de resolução para E.D.O. de primeira ordem. Veremos como resolver equações lineares de primeira ordem, equações homogêneas e muito mais.

ATIVIDADES

..

Atividade. 3.1. Resolva as E.D.O.'s abaixo

a) $y' + xy = x$

b) $(e^{2y} - y\cos xy)dx + (2xe^{y} + 2y - x\cos xy)dy = 0$

c) $dy/dt + y\sqrt{t}sen\, t = 0$

d) $y(x + y + 1)dx + (x + 2y)dy = 0$

Atividade. 3.2. Determine o comportamento, quando $t \to \infty$, de todas as soluções da equação

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0, a \in \mathbb{R}.$$

Atividade. 3.3. Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \;\; y(3) = 0.$$

a)Resolva o problema de valor inicial acima.
b) Existe uma única solução para o problema de valor inicial acima? Justifique sua resposta.

c)E o P.V.I. $\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \;\; y(-4) = 5$ tem solução única? Justifique sua resposta.

d) Determine os pontos (t_0, y_0) para os quais podemos garantir que o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{y}, \;\; y(t_0) = y_0$$

tenha solução única.

Atividade. 3.4. Determine uma função $y = y(x)$ cujo gráfico passe pelo ponto $(1, 1)$ e tal que a reta tangente no ponto genérico (x, y) tenha coeficiente angular $\frac{x^2+2y}{y-2x}$.

Atividade. 3.5. Encontre uma solução satisfazendo a equação diferencial e a condição inicial dada.

$\frac{dy}{dx} + 2y = f(x), y(0) = 0$ onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le x \le 3 \\ 0, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Atividade. 3.6. a)Encontre o valor de k para que a EDO seja exata $(y^3 + kxy^4 - 2x)dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)dy = 0$.

b)Resolva a EDO dada verificando que a função indicada seja um fator de integração

$$6xydx + (4y + 9x^2)dy = 0, \mu(x, y) = y^2.$$

LEITURA COMPLEMENTAR

..

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

SOTOMAYOR, Jorge, Lições de equações diferenciais ordinárias. IMPA.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

3.6 Referências Bibliográficas

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

STEWART, J., Cálculo, volume I. Editora Thomson, 2006a.

STEWART, J., Cálculo, volume II. Editora Thomson, 2006b.